

# 2021阿里巴巴全球数学竞赛预选赛

## 参考答案

**1,2.** 在一个虚拟的世界中, 每个居民(设想为没有大小的几何点) 依次编号为  $1, 2, \dots$ . 为了抗击某种疫情, 这些居民要接种某疫苗, 并在注射后在现场留观一段时间。现在假设留观的场所是平面上的一个半径为  $\frac{1}{4}$  的圆周。为了安全, 要求第  $m$  号居民和第  $n$  号居民之间的距离  $d_{m,n}$  满足

$$(m+n)d_{m,n} \geq 1,$$

这里我们考虑的是圆周上的距离, 也就是两点间劣弧的弧长。那么

**1 选择题(4分)** 下列选项( ) 符合实际情况。

- A 这个留观室最多能容纳 8 个居民;
- B 这个留观室能容纳的居民个数有大于 8 的上限;
- C 这个留观室可以容纳任意多个居民。

**2 证明题(6分)** 证明你的论断。

**R1 答案.** 选项C 符合实际情况.

**R2 答案. 解法一.** 我们可以按下述方式安排第  $1, 2, \dots$  号居民的位置. 首先, 任意安排第 1 号居民的位置. 对  $n \geq 2$ , 若第  $1, 2, \dots, n-1$  号居民的位置已经被安排好, 我们考虑第  $n$  号居民不能在哪些位置.

对于  $1 \leq m \leq n-1$ , 由  $d_{m,n} \geq \frac{1}{m+n}$ , 我们知道, 从第  $m$  号居民的位置开始, 沿顺、逆时针方向各走  $\frac{1}{m+n}$  的距离, 所形成的长度为  $\frac{2}{m+n}$  的圆弧内部是不可以安排第  $n$  号居民的. 而这些圆弧的总长度

$$\frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \dots + \frac{2}{2n-1} < 2(\ln \frac{n+1}{n} + \ln \frac{n+2}{n+1} + \dots + \ln \frac{2n-1}{2n-2}) = 2 \ln \frac{2n-1}{n} < 2 \ln 2.$$

因此, 这些圆弧的并集的总长度不超过  $2 \ln 2$ , 而整个圆周长为  $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$ . 熟知  $\frac{\pi}{2} > 1.5 > 2 \ln 2$ , 故这些圆弧不能覆盖整个圆周, 因此第  $n$  号居民总可以选择一个合适的位置, 使得他与第  $1, 2, \dots, n-1$  号居民之间的距离均满足题目条件. 由数学归纳法可知, 这个圆周可以容纳任意多个居民.

**解法二.** 我们以圆周的圆心为原点建立平面直角坐标系, 并将第  $1, 2, 3, 4$  号居民分别放在  $(\frac{1}{4}, 0), (-\frac{1}{4}, 0), (0, \frac{1}{4}), (0, -\frac{1}{4})$  处, 即他们的辐角主值分别为  $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ . 此时任意两名居民的距离不小于  $2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} > \frac{1}{1+2}$ , 故此时的 4 名居民满足题目条件.

我们使用数学归纳法证明下面命题: 对整数  $k > 2$ , 可以将第  $1, 2, \dots, 2^k$  号居民安置于圆周上一个内接正  $2^k$  边形的各个顶点处, 使得它们互相之间(在圆周上的) 距离满足题目条件, 且编号为  $1, 2, \dots, 2^{k-1}$  号的居民在圆周上两两不相邻.

上述命题对  $k=2$  成立. 若其对  $k$  成立, 即前  $2^k$  号居民的位置都已确定. 考虑他们将圆周分成的  $2^k$  段弧. 我们要将第  $2^k+1, 2^k+2, \dots, 2^{k+1}$  号居民放置在这些弧的中点. 现在来证明可以适当放置使得涉及第  $2^k+1, 2^k+2, \dots, 2^{k+1}$  号居民的距离均满足题目条件.

我们将第  $2^k+1, 2^k+2$  号居民放置在与第  $2^{k-1}$  号居民相邻的位置(即与第  $2^{k-1}$  号居民的辐角差为  $\frac{2\pi}{2^{k+1}}$  距离的位置); 将第  $2^k+3, 2^k+4$  号居民放置在与第  $2^{k-1}-1$  号居民相邻的位置;  $\dots$  将第  $2^k+2a-1, 2^k+2a$  号居民放置在与第  $2^{k-1}-a+1$  号居民相邻的位置;  $\dots$  将第  $2^{k+1}-1, 2^{k+1}$  号居民放置在与第 1 号居民相邻的位置.

由于前  $2^{k-1}$  号居民在圆周上两两不相邻, 这样的放置是可行的. 现在考虑任意两名居民的距离(只需考虑至少一位居民是“新”的情形). 因为圆周被分成了  $2^{k+1}$  段, 每段弧长为  $\frac{2\pi}{2^{k+1}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2^{k+2}}$ , 对于两位编号分别为  $m > 2^k$  和  $n$  的居民, 若它们之间至少有两段弧, 则

$$d_{m,n} \geq \frac{\pi}{2^{k+1}} > \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{m+n} \cdot \frac{2(m+n)}{2^{k+1}} > \frac{1}{m+n};$$

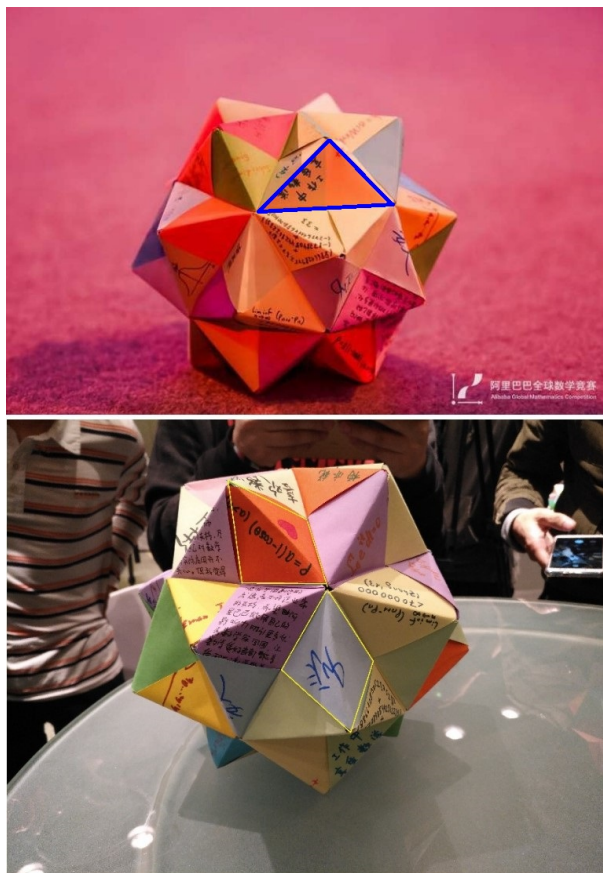
若他们之间的距离恰为一段弧长, 设  $n \in \{2^k+2a-1, 2^k+2a\}$ , 则  $m > 2^{k-1}-a+1$ , 因

此

$$(m+n)d_{m,n} \geq \frac{\pi}{2^{k+2}} \cdot (2^k + 2a - 1 + 2^{k-1} - a + 1) = \frac{\pi}{2^{k+2}} \cdot (2 \cdot 2^{k-1} + a) \geq \frac{3\pi \cdot 2^{k-1}}{2^{k+1}} = \frac{3\pi}{8} > 1.$$

所以，第  $1, 2, \dots, 2^{k+1}$  号居民两两之间的距离均满足题目条件. 由数学归纳法知, 可以安排任意多名居民.

3,4. 2019年第一届阿里巴巴数学竞赛的优胜者在参加集训营的时候,集体送给主办方负责人的礼物,是一个有 60 个全等的三角形面的多面体。从图中我们可以看到,这个多面体的表面是 60 个全等的空间四边形拼接而成的。



一个空间  $n$  边形是指由一个平面  $n$  边形沿若干条对角线做适当翻折(即在选定的对角线处形成适当的二面角)后得到的空间图形。两个空间图形全等指的是它们可以通过  $\mathbb{R}^3$  中的一个等距变换完全重合。一个多面体指的是一个空间有界区域,其边界可以由有限多个平面多边形沿公共边拼接而成。

3 判断题(4分) 我们知道  $2021 = 43 \times 47$ . 那么是否存在一个多面体, 它的表面可以由 43 个全等的空间 47 边形拼接而成?

4 问答题(6分) 请对你的判断给出逻辑的解释。

**R3 答案.** 可以.

**R4 答案.** 我们只需要举一个例子即可. 考虑一个标准的环面  $\mathbb{T}$ , 其上的点可以由两个参数来表示:

$$\mathbb{T} = \{\theta, \varphi : 0 \leq \theta, \varphi < 2\pi\}.$$

我们可以认为这个环面以  $z$ -轴为对称轴:  $(\theta, \varphi)$  对应于空间中的  $((R + r \cos \varphi) \cos \theta, (R + r \cos \varphi) \sin \theta, r \sin \varphi)$ .

对于  $1 \leq k \leq 43$ , 我们考虑环面上的区域

$$D_k = \{\theta, \varphi : \frac{2(k-1)}{43}\pi + 3\frac{\varphi}{86} \leq \theta \leq \frac{2k}{43}\pi + 3\frac{\varphi}{86}\}.$$

直观地说, 把环面分成全等的 43 份之后, 每一份沿  $\{\varphi = 0\}$  切开, 将切开处的一侧保持不动, 另一侧扭转一定角度.

现在, 把  $\{\varphi = 0\}$  这个圆变换成一个正 43 边形, 各个顶点分别对应于  $\theta = \frac{2k}{43}\pi$ . 这样  $D_k$  有四条“边”(其中两条位于  $\{\varphi = 0\}$  上), 四个顶点(两个位于正 43 边形的顶点处, 两个位于边的中点处, 我们还要标记出这两个中点之间的正 43 边形的顶点). 记为

$$\begin{aligned} C_{k,0} &= \left(\frac{2(k-1)}{43}\pi, 0\right), C_{k,1} = \left(\frac{2k}{43}\pi, 0\right); \\ D_{k,0} &= \left(\frac{2k+1}{43}\pi, 2\pi\right), D_{k,1} = \left(\frac{2k+3}{43}\pi, 2\pi\right); \\ E_k &= \left(\frac{2k+2}{43}\pi, 2\pi\right). \end{aligned}$$

在  $\partial D_k$  的另一条边上取 21 个点, 例如

$$A_{k,i} = \left(\frac{2(k-1)}{43}\pi + 3\frac{\varphi}{86}\pi, \frac{i}{11}\pi\right), i = 1, \dots, 21.$$

然后绕  $z$ -轴旋转  $\frac{2}{43}\pi$  后得到另 21 个点, 记为  $B_{k,i}, i = 1, \dots, 21$ .

连结线段  $C_{k,0}C_{k,1}, C_{k,0}A_{k,1}, C_{k,1}B_{k,1}, A_{k,i}A_{k,i+1}, B_{k,i}B_{k,i+1}, A_{k,i}B_{k,i}, A_{k,i}B_{k,i+1}$  ( $i = 1, \dots, 21$ ), 以及  $A_{k,21}D_{k,0}, B_{k,21}D_{k,1}, A_{k,21}E_k, B_{k,21}E_k, D_{k,0}E_k$  和  $E_kD_{k,1}$ . 我们得到一个空间 47 边形. 这样我们就得到了 43 个全等的(上述构造与  $k$  无关)空间 47 边形, 它们能够拼出一个多面体.

**说明:** 一个典型的错误是误认为这些空间多边形的顶点(边) 都是多面体的顶点(边), 从而根据“每条边都算两次”和“2021 是奇数”得到“矛盾”, 由此认为本题的解答是否定的.

5. 去年，张师傅因为多旋圈面爆红，今年他来到了达摩院给扫地僧做面。某天，软件工程师小李跟张师傅吐槽工作。小李主要研究和设计算法用于调节各种产品的参数。这样的参数一般可以通过极小化  $\mathbb{R}^n$  上的某个损失函数  $f$  求得。在小李最近的一个项目中，这个损失函数是另外一个课题组提供的；出于安全考虑和技术原因，该课题组难以向小李给出此函数的内部细节，而只能提供一个接口用于计算任意  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  处的函数值  $f(\mathbf{x})$ 。所以，小李必须仅基于函数值来极小化  $f$ 。而且，每次计算  $f$  的值都消耗不小的计算资源。好在该问题的维度  $n$  不是很高 (10 左右)。另外，提供函数的同事还告知小李不妨先假设  $f$  是光滑的。

这个问题让张师傅想起了自己收藏的一台古董收音机。要在这台收音机上收听一个节目，你需要小心地来回拧一个调频旋钮，同时注意收音效果，直到达到最佳。在这过程中，没有人确切地知道旋钮的角度和收音效果之间的定量关系是什么。张师傅和小李意识到，极小化  $f$  不过就是调节一台有多个旋钮的机器：想象  $\mathbf{x}$  的每一个分量由一个旋钮控制，而  $f(\mathbf{x})$  表示这台机器的某种性能，只要我们来回调整每个旋钮，同时监视  $f$  的值，应该就有希望找到最佳的  $\mathbf{x}$ 。受此启发，两人一起提出了极小化  $f$  的一个迭代算法，并命名为“自动前后调整算法” (Automated Forward/Backward Tuning, AFBT, 算法 1)。在第  $k$  次迭代中，AFBT 通过前后调整  $\mathbf{x}_k$  的单个分量得到  $2n$  个点  $\{\mathbf{x}_k \pm t_k \mathbf{e}^i : i = 1, \dots, n\}$ ，其中  $t_k$  为步长；然后，令  $\mathbf{y}_k$  为这些点中函数值最小的一个，并检查  $\mathbf{y}_k$  是否使  $f$  充分减小；若是，取  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{y}_k$ ，并将步长增倍；否则，令  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$  并将步长减半。在算法 1 中， $\mathbf{e}^i$  表示  $\mathbb{R}^n$  中的第  $i$  个坐标向量，它的第  $i$  个分量为 1，其余皆为 0； $\mathbb{1}(\cdot)$  为指示函数——若  $f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{y}_k)$  至少为  $t_k^2$  之平方，则  $\mathbb{1}[f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{y}_k) \geq t_k^2]$  取值为 1，否则为 0。

---

### 1 自动前后调整算法 (AFBT)

---

输入  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 > 0$ 。对  $k = 0, 1, 2, \dots$ ，执行以下循环。

- 1:  $\mathbf{y}_k := \operatorname{argmin} \{f(\mathbf{y}) : \mathbf{y} = \mathbf{x}_k \pm t_k \mathbf{e}^i, i = 1, \dots, n\}$  # 计算损失函数。
  - 2:  $s_k := \mathbb{1}[f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{y}_k) \geq t_k^2]$  # 是否充分下降？是： $s_k = 1$ ；否： $s_k = 0$ 。
  - 3:  $\mathbf{x}_{k+1} := (1 - s_k)\mathbf{x}_k + s_k\mathbf{y}_k$  # 更新迭代点。
  - 4:  $t_{k+1} := 2^{2s_k - 1}t_k$  # 更新步长。 $s_k = 1$ ：步长增倍； $s_k = 0$ ：步长减半。
- 

现在，我们对损失函数  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  作出如下假设。

**假设 1.**  $f$  为凸函数，即对任何  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  与  $\alpha \in [0, 1]$  都有

$$f((1 - \alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}) \leq (1 - \alpha)f(\mathbf{x}) + \alpha f(\mathbf{y}).$$

**假设 2.**  $f$  在  $\mathbb{R}^n$  上可微且  $\nabla f$  在  $\mathbb{R}^n$  上  $L$ -Lipschitz 连续。

**假设 3.**  $f$  的水平集有界，即对任意  $\lambda \in \mathbb{R}$ ，集合  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \leq \lambda\}$  皆有界。

基于假设 1 与假设 2, 可以证明

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle \leq f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \leq \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle + \frac{L}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$$

对任何  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  成立; 假设 1 与假设 3 则保证  $f$  在  $\mathbb{R}^n$  上取到有限的最小值  $f^*$ 。凸函数的更多性质可参考任何一本凸分析教科书。

证明题(20分) 在假设 1-3下, 对于 AFBT, 证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = f^*.$$

**R5 证明.** 假设  $f(\mathbf{x}_k) \rightarrow f^*$ 。记  $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$ ，则  $\liminf \|\mathbf{g}_k\| > 0$  (取  $\mathbf{x}^*$  使  $f(\mathbf{x}^*) = f^*$ ，则由  $f$  之凸性知  $f(\mathbf{x}_k) - f^* \leq \langle \mathbf{g}_k, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}^* \rangle$ 。因  $\{f(\mathbf{x}_k)\}$  单调且  $f(\mathbf{x}_k) \rightarrow f^*$ ，故  $\{\langle \mathbf{g}_k, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}^* \rangle\}$  有正下界。因  $\{f(\mathbf{x}_k)\}$  不增且  $f$  水平集有界，故  $\{\mathbf{x}_k\}$  有界，从而  $\liminf \|\mathbf{g}_k\| > 0$ )。换言之，存在  $\epsilon > 0$  使  $\|\mathbf{g}_k\| \geq \epsilon$  对所有  $k \geq 0$  成立。任给  $k \geq 0$ ，可取  $i_k \in \{1, \dots, n\}$  满足

$$|\langle \mathbf{g}_k, \mathbf{e}^{i_k} \rangle| \geq \kappa \|\mathbf{g}_k\| \geq \kappa \epsilon, \quad (1)$$

其中  $\kappa = 1/\sqrt{n}$ 。故

$$f(\mathbf{y}_k) \leq \min\{f(\mathbf{x}_k \pm t_k \mathbf{e}^{i_k})\} \leq f(\mathbf{x}_k) - t_k |\langle \mathbf{g}_k, \mathbf{e}^{i_k} \rangle| + \frac{Lt_k^2}{2} \leq f(\mathbf{x}_k) - \kappa \epsilon t_k + \frac{Lt_k^2}{2}. \quad (2)$$

所以，只要

$$t_k \leq \frac{2\kappa\epsilon}{L+2}, \quad (3)$$

我们就有  $f(\mathbf{y}_k) \leq f(\mathbf{x}_k) - t_k^2$ ，从而  $s_k = 1$ ，进而有  $t_{k+1} = 2t_k$ 。由此，易见

$$t_k \geq \underline{t} \equiv \min\left\{t_0, \frac{\kappa\epsilon}{L+2}\right\} > 0 \quad (4)$$

对所有  $k \geq 0$  成立。故存在无穷个  $k$  使得  $s_k = 1$  (否则  $t_k \rightarrow 0$ )；对每一个这样的  $k$ ， $f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_{k+1}) \geq \underline{t}^2$ 。这与  $f$  下方有界相矛盾。故所论成立。



6. 令  $n$  为正整数。对任一正整数  $k$ , 记  $0_k = \text{diag}\{\underbrace{0, \dots, 0}_k\}$  为  $k \times k$  的零矩阵。令

$$Y = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ A^t & 0_{n+1} \end{pmatrix}$$

为一个  $(2n+1) \times (2n+1)$  矩阵, 其中  $A = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n+1}$  是一个  $n \times (n+1)$  实矩阵且  $A^t$  记  $A$  的转置矩阵, 即  $(n+1) \times n$  的矩阵,  $(j, i)$  处元素为  $x_{i,j}$ .

(i) **证明题(10分)** 称复数  $\lambda$  为  $k \times k$  矩阵  $X$  的一个特征值, 如果存在非零列向量

$$v = (x_1, \dots, x_k)^t$$

使得  $Xv = \lambda v$ . 证明:  $0$  是  $Y$  的特征值且  $Y$  的其他特征值形如  $\pm\sqrt{\lambda}$ , 其中非负实数  $\lambda$  是  $AA^t$  的特征值。

(ii) **证明题(15分)** 令  $n = 3$  且  $a_1, a_2, a_3, a_4$  是 4 个互不相等的正实数。记

$$a = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq 4} a_i^2}$$

以及

$$x_{i,j} = a_i \delta_{i,j} + a_j \delta_{4,j} - \frac{1}{a^2} (a_i^2 + a_4^2) a_j$$

$(1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4)$ , 其中  $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$ . 证明:  $Y$  有 7 个互不相等的特征值。

**R6 证明:** (i) 记  $I_n = \text{diag}\{\underbrace{1, \dots, 1}_n\}$  为  $n \times n$  恒同矩阵. 作初等变换可证

$$\det(\lambda I_{2n+1} - Y) = \lambda \det(\lambda^2 I_n - AA^t).$$

所以, 0 是  $Y$  的特征值且  $Y$  的其他特征值形如  $\pm\sqrt{\lambda}$ , 其中  $\lambda$  是  $AA^t$  的非负实数特征值.

(ii) 记  $u = (a_4, a_4, a_4)$ ,  $v = (\frac{a_1^2+a_4^2}{a}, \frac{a_2^2+a_4^2}{a}, \frac{a_3^2+a_4^2}{a})$ . 计算得

$$AA^t = \text{diag}\{a_1^2, \dots, a_3^2\} + u^t u - v^t v.$$

设  $f(s) = \det(sI_n - AA^t)$  为  $AA^t$  的特征多项式. 计算得

$$f(a_i^2) = \frac{a_i^2}{a^2} \prod_{1 \leq j \leq 4, j \neq i} (a_i^2 - a_j^2)$$

( $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ). 令  $a'_1, a'_2, a'_3, a'_4$  为  $a_1, a_2, a_3, a_4$  经重排后得到的递减序列. 由  $f(x_i^2)$  的表达式得:  $AA^t$  有三个互不相等的特征值  $b_1^2, b_2^2, b_3^2$ , 其中  $b_1, b_2, b_3$  是满足

$$a'_1 > b_1 > a'_2 > b_2 > a'_3 > b_3 > a'_4$$

的正实数. 因此, 由(i)得  $Y$  有 7 个互不相等的特征值.

7. 对于  $\mathbb{R}$  上的连续且绝对可积的复数值函数  $f(x)$ , 定义  $\mathbb{R}$  上的函数  $(Sf)(x)$ :

$$(Sf)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i u x} f(u) du.$$

(i) 问答题(10分) 求  $S(\frac{1}{1+x^2})$  和  $S(\frac{1}{(1+x^2)^2})$  的显式表达式。

(ii) 问答题(15分) 对任意整数  $k$ , 记  $f_k(x) = (1+x^2)^{-1-k}$ . 假设  $k \geq 1$ , 找到常数  $c_1, c_2$  使得函数  $y = (Sf_k)(x)$  满足二阶常微分方程

$$xy'' + c_1y' + c_2xy = 0.$$

R7 答案:

(i)

$$S\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \pi e^{-2\pi|x|}$$

且

$$S\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{\pi}{2}(1+2\pi|x|)e^{-2\pi|x|}.$$

(ii)  $c_1 = -2k$  且  $c_2 = -4\pi^2$ .

解答 记  $V$  为  $\mathbb{R}$  上的复数值、连续、绝对可积的函数组成的线性空间.

**Lemma 0.1.** (i) 若  $f(x) \in V$ ,  $f'(x) \in V$  且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , 则

$$(Sf')(x) = -2\pi i x (Sf)(x). \quad (5)$$

(ii) 若  $f(x) \in V$  且  $xf(x) \in V$ , 则

$$(Sf)' = 2\pi i S(xf(x)). \quad (6)$$

引理 0.1 的证明. (i)

$$\begin{aligned} & (Sf')(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i u x} f'(u) du \\ &= e^{2\pi i u x} f(u) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{2\pi i u x})' f(u) du \\ &= -2\pi i x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i u x} f(u) du \\ &= -2\pi i x (Sf)(x) \end{aligned}$$

(ii) 对任意的  $a, b \in \mathbb{R}$  ( $a < b$ ),

$$\begin{aligned} & \int_a^b 2\pi i S(xf(x)) dx \\ &= \int_a^b 2\pi i \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i u x} u f(u) du \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_a^b 2\pi i u e^{2\pi i u x} f(u) dx \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i b u} f(u) du - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i a u} f(u) du \end{aligned}$$

$$= (Sf)(b) - (Sf)(a).$$

这样,  $(Sf)' = 2\pi\mathbf{i}S(xf(x))$ . □

引理0.1有如下推论.

**Corollary 0.2.** (i) 假设  $f, f', Sf, x(Sf)(x) \in V$  且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

若  $(S(Sf))(x) = f(-x)$ , 则  $(S(Sf'))(x) = f'(-x)$ .

(ii) 假设  $f(x), xf(x), Sf, (Sf)' \in V$  且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (Sf)(x) = 0.$$

若  $(S(Sf))(x) = f(-x)$ , 则  $S(S(xf(x))) = -xf(-x)$ .

**Lemma 0.3.** (i)  $S((1+x^2)^{-1}) = \pi e^{-2\pi|x|}$ .

(ii)  $S(\pi e^{-2\pi|x|}) = (1+x^2)^{-1}$ .

*Proof.* (i) 记  $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ . 对于  $x \geq 0$ , 我们有

$$(Sf)(x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{e^{2\pi i u x}}{1+u^2} du.$$

记

$$C_A := \{z = u + \mathbf{i}v : -A \leq u \leq A, v = 0\} \cup \{z = Ae^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

注意到当  $A > 1$  时,  $\mathbf{i}$  是  $\frac{1}{1+z^2}$  在  $C_A$  界定的有界区域内的唯一极点. 由回路积分的方法并令  $A \rightarrow \infty$ , 我们得到  $(Sf)(x) = \pi e^{-2\pi x}$ . 由于  $f(x)$  是偶函数, 所以  $(Sf)(x)$  也是偶函数. 这样,  $(Sf)(x) = \pi e^{-2\pi|x|}$ .

(ii) 记  $g(x) = \pi e^{-2\pi|x|}$ . 直接计算得

$$\begin{aligned} & (Sg)(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x u} \pi e^{-2\pi|u|} du \\ &= \pi \int_0^{\infty} (e^{2\pi i x u} + e^{-2\pi i x u}) e^{-2\pi u} du \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{e^{-2\pi(1+\mathbf{i}x)u}}{1+\mathbf{i}x} + \frac{e^{-2\pi(1-\mathbf{i}x)u}}{1-\mathbf{i}x} \right) \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 0.4.** (i) 对于任意的  $k \geq 0$ ,  $Sf_k$  形如  $(Sf_k)x = e^{-2\pi|x|}g_k(|x|)$ , 其中  $g_k$  是个  $k$  次多项式.

(ii) 对于任意的  $k \geq 0$ ,  $S(S(f_k)) = f_k$  且  $S(S(xf_{k+1}(x))) = -xf_{k+1}(x)$ .

*Proof.* (i) 我们有递归公式

$$f_{k+1} = f_k + \frac{1}{2(k+1)}xf'_k(x).$$

由引理0.1, 得递归公式:

$$Sf_{k+1} = Sf_k - \frac{1}{2(k+1)}(x(Sf_k)(x))'.$$

由此, 由归纳法我们导出结论.

(ii) 注意到  $f'_k(x) = -2(k+1)xf_{k+1}(x)$  且  $(xf_k(x))' = -(1+2k)f_k(x) + 2(k+1)f_{k+1}(x)$ . 由(i)部分的结论结合引理0.1, 我们知道推论0.2中的假设对函数  $f_k(x)$  和  $xf_{k+1}(x)$  ( $k \geq 0$ ) 成立. 这样, 由归纳法可证  $S(S(f_k)) = f_k(x)$  且  $S(S(xf_{k+1}(x))) = -xf_{k+1}(x)$  ( $k \geq 0$ ). □

回到题目本身. (i)在引理0.3中已经证明  $S((1+x^2)^{-1}) = \pi e^{-2\pi|x|}$ . 由(5)得

$$S(-2x(1+x^2)^{-2}) = -2\pi^2 i x e^{-2\pi|x|}.$$

再由(6)得

$$S(-2x^2(1+x^2)^{-2}) = -\pi(1-2\pi|x|)e^{-2\pi|x|}.$$

这样,

$$S((1+x^2)^{-2}) = \frac{\pi}{2}(1+2\pi|x|)e^{-2\pi|x|}.$$

(ii) 首先, 当  $k \geq 1$  时,  $x^j f_k(x)$  ( $0 \leq j \leq 2k$ ) 都是绝对可积的. 这样, 由(6),  $y = (Sf_k)(x)$  是  $2k$  次连续可微函数. 由引理0.1和引理0.4得:  $xy'' + c_1 y' + c_2 xy = 0$  等价于

$$(x^2 f'_k + 2x f_k) - c_1 x f_k - \frac{c_2}{4\pi^2} f'_k = 0.$$

输入  $f_k(x) = (1+x^2)^{-1-k}$ , 我们得到  $c_1 = -2k$  且  $c_2 = -4\pi^2$ .

8. 当某公司推出一个新的社交软件时，公司的市场部门除了会关心该软件的活跃客户的总人数随时间的变化，也会对客户群体的一些特征做具体的调研和分析。我们用  $n(t, x)$  表示客户的数量密度（以下简称密度），这里  $t$  表示时间，而  $x$  表示客户对该社交软件的使用时长，那么在  $t$  时刻，对于  $0 < x_1 < x_2$ ，使用时长介于  $x_1$  和  $x_2$  之间的客户数量为  $\int_{x_1}^{x_2} n(t, x) dx$ 。我们假设，密度  $n(t, x)$  随着时间演化受以下几个因素的影响：

**假设 1.** 当客户持续使用该社交软件时，他的使用时长随时间线性增长。

**假设 2.** 客户在使用过程中，可能会停止使用，我们假设停止速率  $d(x) > 0$  只跟使用时长  $x$  有关。

**假设 3.** 新客户的来源有两个。

① 公司的宣传：单位时间内因此增加的人数是时间的函数，用  $c(t)$  表示。

② 老客户的宣传：老客户会主动向自己的同事、朋友等推荐使用该社交软件，推荐成功的速率跟客户的使用时长  $x$  有关，记作  $b(x)$ 。

假设如果在某一时刻，记为  $t = 0$  时，密度函数是已知的， $n(0, x) = n_0(x)$ 。可以推导出， $n(t, x)$  的时间演化满足如下的方程

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} n(t, x) + d(x)n(t, x) = 0, & t \geq 0, x \geq 0, \\ N(t) := n(t, x = 0) = c(t) + \int_0^\infty b(y)n(t, y) dy. \end{cases} \quad (7)$$

这里  $N(t)$  可解读为新客户的增加速率。我们假设  $b, d \in L^\infty_+(0, \infty)$ ，即  $b(x)$  和  $d(x)$  正且(本质)有界。以下，我们先做一个简化假设： $c(t) \equiv 0$ ，即新客户的增加只跟老客户的宣传有关。

(i) **问答题(10分)** 根据**假设 1**和**假设 2**，形式地推导出(7)中  $n(t, x)$  所满足的偏微分方程，需要在推导过程中指出模型假设和数学表达式之间的对应关系。再根据**假设 3**，解释(7)中  $N(t)$  的定义的含义。

(ii) **问答题(10分)** 我们想要研究新客户的增加速率  $N(t)$  和推荐成功速率  $b(x)$  之间的关系。为此，请推导出一个  $N(t)$  所满足的方程，且方程中只包含  $N(t)$ ,  $n_0(x)$ ,  $b(x)$ ,  $d(x)$ ，而不包含  $n(t, x)$ 。并证明， $N(t)$  满足如下估计

$$|N(t)| \leq \|b\|_\infty e^{\|b\|_\infty t} \int_0^\infty |n_0(x)| dx, \quad (8)$$

这里  $\|\cdot\|_\infty$  表示  $L^\infty$  范数。

(iii) **证明题(10分)** 最后, 我们想要研究, 在充分长的时间之后, 数量密度函数  $n(t, x)$  有什么渐近的趋势。由于客户总人数可能一直在增加, 所以我们不方便直接研究数量密度函数  $n(t, x)$ , 而更应该去看一个重整化的密度函数。

为此, 我们首先假设如下的特征值问题有唯一解  $(\lambda_0, \varphi(x))$ :

$$\begin{cases} \varphi'(x) + (\lambda_0 + d(x))\varphi(x) = 0, & x \geq 0, \\ \varphi(x) > 0, \quad \varphi(0) = \int_0^\infty b(x)\varphi(x)dx = 1, \end{cases}$$

并且它的对偶问题也有唯一的解  $\psi(x)$ :

$$\begin{cases} -\psi'(x) + (\lambda_0 + d(x))\psi(x) = \psi(0)b(x), & x \geq 0, \\ \psi(x) \geq 0, \quad \int_0^\infty \psi(x)\varphi(x)dx = 1. \end{cases}$$

然后, 我们定义重整化密度  $\tilde{n}(t, x) := n(t, x)e^{-\lambda_0 t}$ 。证明, 对于任意凸函数  $H: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  满足  $H(0) = 0$ , 我们有

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty \psi(x)\varphi(x)H\left(\frac{\tilde{n}(t, x)}{\varphi(x)}\right) dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

并证明

$$\int_0^\infty \psi(x)n(t, x)dx = e^{\lambda_0 t} \int_0^\infty \psi(x)n_0(x)dx.$$

为了简化证明, 我们在演算中假定在  $\infty$  处的边界项的贡献都是可以忽略的。



**R8 答案:** (i) 这个方程推导方式有很多。举两个例子。

1, 特征线法。由于使用时长随时间线性增长, 我们定义特征线  $x(t)$ , 它满足

$$\frac{dx(t)}{dt} = 1.$$

而顺着特征线, 根据停止速率的含义, 我们有

$$\frac{d}{dt}n(t, x(t)) = -d(x(t))n(t, x(t)).$$

整理即得(7)式方程。

2, 微元法。考虑一个时间微元  $\delta t \ll 1$ , 根据假设一和假设二, 我们有

$$n(t + \delta t, x + \delta t) = n(t, x) - \delta t d(x)n(x, t) + o(\delta t).$$

其中右端第一项表示时间平移的贡献, 第二项表示停止的客户数量。两边除以  $\delta t$ , 再令  $\delta t \rightarrow 0$ , 即得此方程。

关于  $N(t)$  的定义, 只需要说明老客户推荐的贡献。对于固定某个使用时长  $x$  的老客户, 他们单位时间内介绍的新客户的数量为  $b(x)n(t, x)$ 。为了求单位时间内所有老客户介绍的新客户数量, 需要把所有使用时长的老客户的贡献加在一起, 故表达为  $\int_0^\infty b(y)n(t, y)dy$ 。

(ii) 根据题意和  $N(t)$  的定义, 我们需要先把密度函数  $n(t, x)$  写成  $N(t)$  和其他参数的表达式, 这要求解此方程。

注意到这是一个一阶双曲方程, 可以用特征线法求解。将方程改写为

$$\frac{d}{ds}n(t + s, x + s) + d(x + s)n(t + s, x + s) = 0,$$

则如果定义  $D(x) = \int_0^x d(y)dy$ , 那么

$$\frac{d}{ds} [e^{D(x+s)}n(t + s, x + s)] = 0. \quad (9)$$

那么, 当  $s \geq \max(-t, -x)$  时, 我们有

$$e^{D(x+s)}n(t + s, x + s) = e^{D(x)}n(t, x), \quad \forall x \geq 0, t \geq 0. \quad (10)$$

特别的, 我们可以令  $x = y, s = -y$  可得, 当  $t \geq y$  时

$$n(t, y) = N(t - y)e^{-D(y)}.$$

再令  $x = y$ ,  $s = -t$  可得, 当  $t \leq y$  时

$$n(t, y) = n_0(y - t)e^{D(y-t)-D(y)}.$$

为了导出  $N(t)$  满足的方程, 我们将它的表达式拆分成两部分

$$N(t) = \int_0^\infty b(y)n(t, y)dy = \int_0^t b(y)n(t, y)dy + \int_t^\infty b(y)n(t, y)dy.$$

根据特征线可知, 右端第一项的特征线起源于  $x = 0, t \geq 0$ , 而第二项的特征线起源于  $x \geq 0, t = 0$ 。将  $n(t, y)$  的表达式分别代入, 我们得到

$$N(t) = \int_0^t b(y)e^{-D(y)}N(t - y)dy + \int_t^\infty b(y)e^{D(y-t)-D(y)}n_0(y - t)dy. \quad (11)$$

整理, 即得到  $N(t)$  满足的方程

$$N(t) = \int_0^t b(t - x)e^{-D(t-x)}N(x)dx + \int_0^\infty b(x + t)e^{D(x)-D(x+t)}n_0(x)dx. \quad (12)$$

考虑到  $d(x) > 0$  所以  $D$  是递增函数, 上式中的  $e^{-D(t-x)}$ ,  $e^{D(x)-D(x+t)}$  均不大于 1。于是, 再利用  $b(x)$  的有界性, 我们可以对  $N(t)$  做如下估计

$$|N(t)| \leq \|b\|_\infty \int_0^t |N(x)|dx + \|b\|_\infty \int_0^\infty |n_0(x)|dx.$$

最后, 利用Gronwall 引理, 我们就可以得到待证的不等式。

(iii) 这是一个广义的相对熵估计的问题。

首先我们将方程(7)改写成重整化密度函数满足的方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{n}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{n}(t, x) + (\lambda_0 + d(x)) \tilde{n}(t, x) = 0.$$

然后, 我们进一步地改写, 整理得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\tilde{n}(t, x)}{\varphi(x)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tilde{n}(t, x)}{\varphi(x)} = 0,$$

进而有

$$\frac{\partial}{\partial t} H \left( \frac{\tilde{n}(t, x)}{\varphi(x)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} H \left( \frac{\tilde{n}(t, x)}{\varphi(x)} \right) = 0.$$

将特征值问题和其对偶问题整合在一起，我们有

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}[\varphi(x)\psi(x)] = -\psi(0)b(x)\varphi(x), & x \geq 0, \\ \psi(x) \geq 0, & \int_0^\infty \psi(x)\varphi(x)dx = 1. \end{cases}$$

通过直接计算，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \psi(x)\varphi(x)H\left(\frac{\tilde{n}(t,x)}{\varphi(x)}\right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \psi(x)\varphi(x)H\left(\frac{\tilde{n}(t,x)}{\varphi(x)}\right) \right] = -\psi(0)b(x)\varphi(x)H\left(\frac{\tilde{n}(t,x)}{\varphi(x)}\right).$$

记  $d\mu(x) = b(x)\varphi(x)dx$ ，将上式对  $x$  在  $\mathbb{R}^+$  上积分，可得，

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty \psi(x)\varphi(x)H\left(\frac{\tilde{n}(t,x)}{\varphi(x)}\right) dx = -\psi(0) \int_0^\infty H\left(\frac{\tilde{n}(t,x)}{\varphi(x)}\right) d\mu(x) + \psi(0)H\left(\frac{\tilde{n}(t,0)}{\varphi(0)}\right).$$

我们注意到，由定义知  $\varphi(0) = 1$ ，且  $n(t,0) = \int_0^\infty b(x)n(t,x)dx$ ，那么

$$\frac{\tilde{n}(t,0)}{\varphi(0)} = \tilde{n}(t,0) = \int_0^\infty b(x)\tilde{n}(t,x)dx = \int_0^\infty \frac{\tilde{n}(t,x)}{\varphi(x)}d\mu(x),$$

于是可得

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty \psi(x)\varphi(x)H\left(\frac{\tilde{n}(t,x)}{\varphi(x)}\right) dx = \psi(0) \left[ - \int_0^\infty H\left(\frac{\tilde{n}(t,x)}{\varphi(x)}\right) d\mu(x) + H\left(\int_0^\infty \frac{\tilde{n}(t,x)}{\varphi(x)}d\mu(x)\right) \right].$$

再由Jensen不等式，我们可得

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty \psi(x)\varphi(x)H\left(\frac{\tilde{n}(t,x)}{\varphi(x)}\right) dx \leq 0.$$

最后，令  $H(u) = u$ ，即得待证等式。